

2ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ

- *) Ας υποθέσουμε ότι σε ένα γραφείο πολεοδομίας ενός μικρού δήμου υποβάλλονται κατά μέσο όρο 5 αιτήσεις έκδοσης οικοδομικών αδειών ανά μήνα. Λόγω αλλαγών στην νομοθεσία στους επόμενους μήνες αναμένεται αύξηση του ρυθμού υποβολής αιτημάτων σε 10 ανά μήνα. Ο αρμόδιος υπάλληλος της πολεοδομίας ανησυχεί για τη δυνατότητα εξυπηρέτησης των πολιτών και σκέφτηκε να καταγράψει τα στατιστικά στοιχεία των χρόνων έκδοσης μιας οικοδομικής άδειας για το προηγούμενο έτος στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

Χρόνος έκδοσης	Αριθμός Αιτήσεων	Ποσοστό Αιτήσεων
1 ημέρα	48	40%
2 ημέρες	36	30%
3 ημέρες	24	20%
4 ημέρες	12	10%
Σύνολο	120	100%

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία ο αρμόδιος υπάλληλος θέλει να εξετάσει αν κατ' αρχήν έχει τη δυνατότητα εξυπηρέτησης των πολιτών που θα υποβάλλουν αίτηση έκδοσης οικοδομικής άδειας και στη συνέχεια να υπολογίσει το χρόνο αναμονής για την έκδοση αδειών (ένας μήνας έχει κατά μέσο όρο 22 εργάσιμες ημέρες).

- Μια εταιρεία τσιμέντων χρησιμοποιεί τα δικά της φορτηγά για να μεταφέρει συσκευασμένο τσιμέντο από το εργοστάσιό της, στο κοντινό λιμάνι για τη φόρτωση του τσιμέντου σε πλοία. Για την εκφόρτωση συσκευασμένου τσιμέντου χρησιμοποιείται εργατικό προσωπικό της εταιρείας. Εμπειρικά έχει υπολογιστεί ότι δύο άτομα μπορούν να εκφορτώσουν ένα πλήρες φορτίο σε μία ώρα. Αν χρησιμοποιηθούν περισσότερα ή λιγότερα άτομα αντίστοιχα, τότε ο χρόνος εκφόρτωσης μεταβάλλεται ανάλογα (δηλαδή, για την εκφόρτωση ενός φορτίου με ένα άτομο απαιτούνται 2 ώρες κ.ο.κ.). Για κάθε ώρα που το φορτηγό αναμένει μέχρι να αρχίσει η εκφόρτωσή του, η εταιρεία επιβαρύνεται με κόστος 160€ (απώλεια παραγωγικής χρήσης του φορτηγού, κόστος οδηγού κ.λ.π.). Το αντίστοιχο ωριαίο κόστος για τους εκφορτωτές είναι 50€/ώρα. Τα φορτηγά αναχωρούν από το εργοστάσιο και φτάνουν στο λιμάνι με μέσο ρυθμό δύο φορτηγών ανά ώρα, σύμφωνα με την κατανομή Poisson. Η επιχείρηση ενδιαφέρεται να προσδιορίσει, προσαρμόζοντας ένα M/M/1 σύστημα, το βέλτιστο αριθμό εκφορτωτών που πρέπει να εργάζονται ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος της εκφόρτωσης του τσιμέντου.
- Μια εταιρεία βρίσκεται στη διαδικασία αγοράς ενός εμπορικού φωτοτυπικού μηχανήματος υψηλής ταχύτητας. Υπάρχουν τέσσερα μοντέλα που έχουν προταθεί από τους πωλητές, οι προδιαγραφές των οποίων παρουσιάζονται στη συνέχεια

Μοντέλο φωτοτυπικού	Λειτουργικό κόστος (ευρώ/ώρα)	Ταχύτητα (φύλλα/λεπτό)
1	15	30
2	20	36
3	24	50
4	27	66

Οι εργασίες φθάνουν στην εταιρεία σύμφωνα με την κατανομή Poisson με ρυθμό 4 εργασιών ανά ημέρα (24 ώρες). Το μέγεθος των εργασιών είναι τυχαίο αλλά κατά μέσο όρο είναι περίπου ίσο με 10000 φύλλα ανά εργασία και ο χρόνος για την διεκπεραίωσή τους εκθετικός. Τα συμβόλαια με τους πελάτες προσδιορίζουν ένα κόστος - ποινή για καθυστερημένη παράδοση που είναι ίσο με 80 ευρώ ανά εργασία και ανά ημέρα. Ποιο φωτοτυπικό θα πρέπει να αγοράσει η εταιρεία;

- Στις εγκαταστάσεις μιας αποθήκης εργαλείων με πολλούς υπαλλήλους, οι αιτήσεις για ανταλλαγή εργαλείων συμβαίνουν σύμφωνα με την κατανομή Poisson με ρυθμό 17.5 αιτήσεις την ώρα. Ο κάθε υπάλληλος μπορεί να χειριστεί κατά μέσο όρο 10 αιτήσεις την ώρα. Το κόστος της πρόσληψης ενός νέου υπαλλήλου είναι 12 ευρώ την ώρα. Το κόστος της παραγωγής που χάνεται για την κάθε μηχανή που αναμένει και ανά ώρα είναι περίπου 50 ευρώ. Να προσδιορίσετε το βέλτιστο πλήθος υπαλλήλων για το σύστημα.
- Θεωρούμε ένα M/M/1 σύστημα με ρυθμό αφίξεων λ , ρυθμό εξυπηρέτησης μ ($\lambda < \mu$). Έστω ότι για κάθε πελάτη υπάρχει κόστος h ανά μονάδα χρόνου παραμονής του στο σύστημα. Επίσης υπάρχει ένα κόστος λειτουργίας του υπαλλήλου το οποίο είναι ανάλογο του ρυθμού εξυπηρέτησης συγκεκριμένα ίσο με $c\mu$ όπου c γνωστή σταθερά. Το κόστος λειτουργίας υπάρχει ανεξάρτητα αν ο υπάλληλος εξυπηρετεί ή όχι.
 - Να υπολογιστεί το μέσο συνολικό κόστος ανά μονάδα χρόνου σε στατιστική ισορροπία
 - Να βρεθεί το μ που ελαχιστοποιεί το μέσο συνολικό κόστος ανά μονάδα χρόνου
 - Να επαναληφθούν τα (1) και (2) για την περίπτωση που υπάρχει κόστος μόνο όταν ο υπάλληλος εξυπηρετεί

6. Σε ένα $M/M/1$ σύστημα με ρυθμό αφίξεων λ , ρυθμό εξυπηρέτησης μ ($\lambda < \mu$) ο διαχειριστής του συστήματος έχει τη δυνατότητα να προσδιορίσει το ποσοστό p των πελατών, από αυτούς που φθάνουν στο σύστημα, που γίνονται δεκτοί για εξυπηρέτηση (οι υπόλοιποι πελάτες απορρίπτονται). Κάθε πελάτης που γίνεται δεκτός στο σύστημα αποφέρει R χρηματικές μονάδες από την εξυπηρέτησή του. Επίσης κάθε πελάτης που παραμένει στο σύστημα (είτε σε αναμονή είτε σε εξυπηρέτηση) έχει κόστος c χ.μ.. Ένας πελάτης που απορρίπτεται δεν έχει ούτε έσοδα ούτε έξοδα.

1. Να βρεθεί το μέσο καθαρό κέρδος όλων των πελατών στη μονάδα του χρόνου συναρτήσει του p , $U(p)$
2. Να βρεθεί το p που μεγιστοποιεί το $U(p)$

555

7. Σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπάλληλο, οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson με ρυθμό λ .

Ένας πελάτης που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα έχει πιθανότητα $\frac{1}{M-n}$ να μπει στο χώρο αναμονής

διαφορετικά αναχωρεί χωρίς να περιμένει να εξυπηρετηθεί. Οι πελάτες που μπαίνουν στο σύστημα περιμένουν στο χώρο αναμονής. Υπάρχει ένας υπάλληλος που παραμένει αδρανής όσο ο χώρος αναμονής έχει λιγότερους από M πελάτες. Τη στιγμή που μπαίνει ο M -οστος πελάτης ο υπάλληλος αρχίζει να εξυπηρετεί και τους M παρόντες πελάτες ταυτόχρονα. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό μ και όταν ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση οι πελάτες αποχωρούν από το σύστημα ταυτόχρονα και ο υπάλληλος μπαίνει πάλι σε αδράνεια. Πελάτες που φτάνουν στο σύστημα όσο διαρκεί η εξυπηρέτηση χάνονται. Κάθε πελάτης που μπαίνει στο σύστημα πληρώνει R χρηματικές μονάδες (χ.μ.) ενώ ο υπάλληλος αμείβεται c χ.μ ανά μονάδα χρόνου.

1. Να υπολογιστεί η οριακή κατανομή του αριθμού πελατών στο σύστημα, ο αναμενόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα σε στατιστική ισορροπία και ο αναμενόμενος αριθμός πελατών που χάνεται στη μονάδα του χρόνου σε στατιστική ισορροπία.
2. Να βρεθεί το M που μεγιστοποιεί το καθαρό μέσο κέρδος στη μονάδα του χρόνου